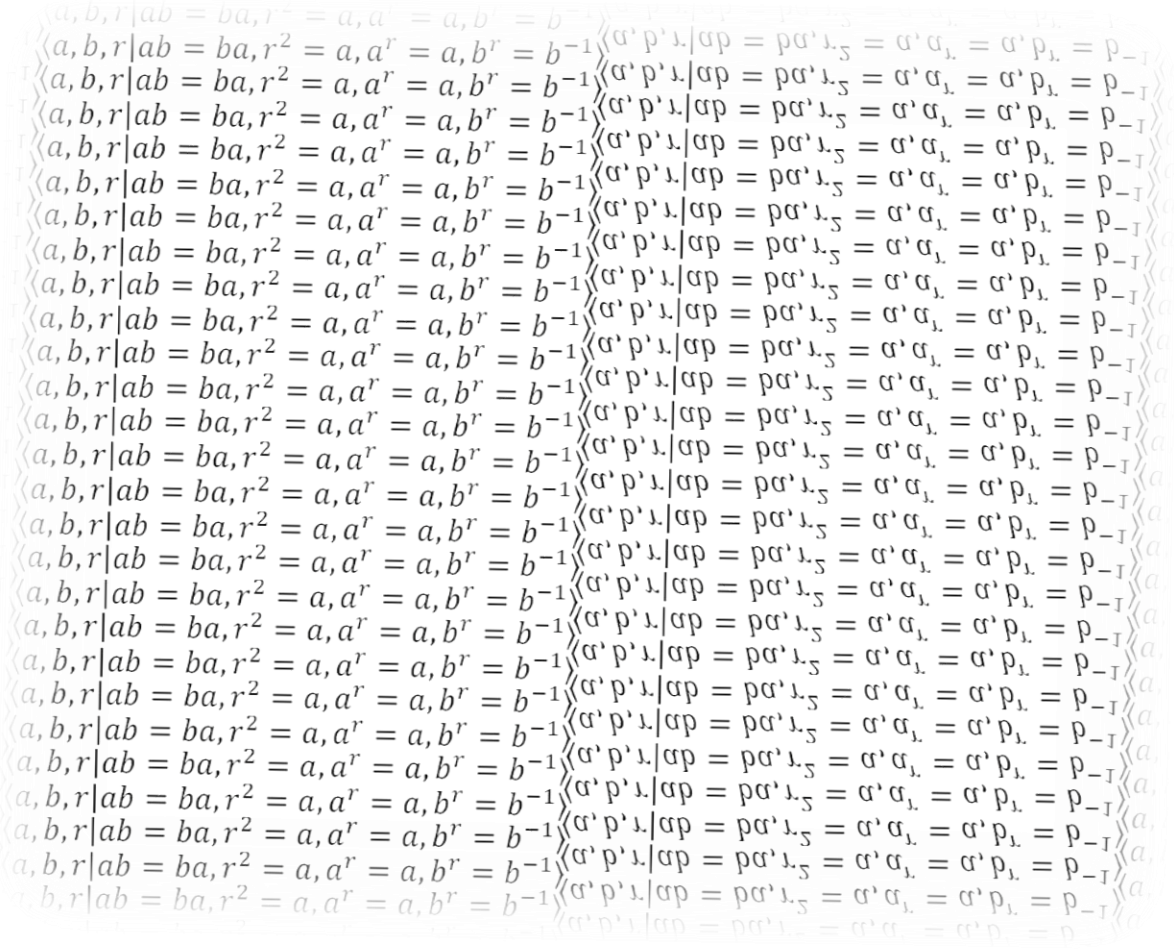
ÉTUDE DES PAVAGES DU PLAN PAR LA THÉORIE DES GROUPES



Mentor : Antoine Gournay Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel)

TABLE DES MATIÈRES :

INTRODUCTION : 4
1° LES BASES : 5
Les groupes : 5
Exemples : 5
Quelques exemples de groupes : 7
2° LES ISOMÉTRIES DU PLAN : 8
Théorème 2.1 : 8
Les différentes transformations du plan : 9
Théorème 2.2 : 10
3° LES RÉFLEXIONS : 10
Théorème 3.1 : 10
Théorème 3.2 : 11
Quatre réflexions : 13
Plus de quatre réflexions : 14
4° LES GROUPES DISCRETS DU PLAN : 15
Théorème 4.1 : 15
Corollaire 4.1 (Léonard de Vinci) : 15
Théorème 4.2 : 16
5° LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES : LES CAS PRÉSERVANT L'ORIENTATION 17
Théorème 5.1 17
Théorème 5.2 18
Le choix de ***b*** : 18
Théorème 5.3 19
6° LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES : LES CAS NE PRÉSERVANT PAS L'ORIENTATION 20
Lemme 6.1 : 20
Lemme 6.2 : 21

Cas 1 : $\boldsymbol{G1}$ 22
Cas 2 : $\boldsymbol{G2}$ 22
Cas 3 : $\boldsymbol{G4}$ 23
Lemme 6.3 : 24
Cas 4 : $\boldsymbol{G3}$ 24
Cas 5 : $\boldsymbol{G6}$ 25
CONCLUSION : 26
SOURCES : 27

INTRODUCTION :

La théorie des groupes est un domaine fondamental des mathématiques modernes. Elle est principalement utilisée pour l'étude de la symétrie au sens large, c'est-à-dire toute transformation qui ne change pas un objet. Un groupe est une structure contenant un ensemble et une opération interne qui lie deux éléments à un troisième.

La théorie des groupes a été développée au XIX^{e} siècle notamment par Évariste Galois afin de trouver des solutions générales aux équations polynomiales quelconques et a permis de trouver des critères de résolubilité.

La théorie des groupes est aussi très utilisée en géométrie. Le groupe de symétrie d'un objet est un ensemble de transformations qui le laisse invariant. On peut étudier la composition de symétries et les relations les liant comme dans ce travail. On peut aussi utiliser le calcul différentiel sur ces formes géométriques. C'est le principe des groupes de Lie qui jouent un rôle important dans de nombreuses sciences.

Un pavage du plan est un ensemble de figures géométriques planes qui couvrent un plan sans chevauchement et sans laisser de trous. Dans ce travail, nous étudierons les pavages périodiques, c'est-à-dire les pavages où il existe des translations qui laissent invariant le pavage. Ces pavages correspondent aux groupes discrets du plan qui sont le cœur de ce travail.

Un mur de l'Alhambra

Les pavages sont connus depuis l'Antiquité, ils ont été beaucoup utilisés de façon décorative notamment par les musulmans, certaines branches de l'islam n'autorisant pas la représentation de personnages. L'Alhambra de Grenade contient ainsi presque tous les types possibles de pavages réguliers.

Les pavages sont très utiles en chimie, où ils correspondent à des réseaux atomiques de cristaux. Le mathématicien Evgraf Federov a montré en 1891 qu'il existait 17 groupes discrets du plan. Et en 1968, Heinrich Heesch montra qu'il n'existait que 28 types de pavés différents. Cette classification a été améliorée car plusieurs pavés sont des cas particuliers d'autres et aujourd'hui on classe les

pavés en 19 types, deux des groupes discrets acceptant deux types de pavés différents.

Dans ce travail, nous allons commencer par donner quelques bases de la théorie des groupes, puis nous étudieront les isométries du plan de façon générale pour finir sur les groupes discrets de ces isométries correspondants aux pavages du plan.

1° LES BASES :

Voyons déjà quelques bases de la théorie des groupes en général.

Les groupes :

Un groupe est une structure contenant un ensemble et une opération liant deux éléments de cet ensemble à un élément de l'ensemble, que l'on notera par exemple $G(E,\bullet)$ et $a \bullet b = c$, l'application de cette opération. Cette relation doit satisfaire trois axiomes :

1) L'associativité :
$$\forall a, b, c \in E, (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$
2) L'existence d'un élément neutre, noté i :
$$\forall a \ \in E, a \bullet i = i \bullet a = a$$
3) Un inverse pour tout élément de E, noté a^{-1} :
$$\forall a \in E, a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = i$$

Pour ne pas surcharger le texte, on utilise la notation multiplicative, c'est-à-dire en omettant l'opération et en accolant les différents termes de l'équation. On écrit alors 1 pour l'élément neutre i. Par exemple, l'équation du premier axiome s'écrit :

$$(ab)c = a(bc)$$

Le conjugué de x par y, noté x^y, qui est toujours dans les isométries du plan une transformation de la famille de x, est définit comme :

$$x^y = y^{-1}xy$$

Exemples :

1) L'addition sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{Q}$ ou sur $\mathbb{Z}$ forme un groupe, l'élément neutre étant 0 et l'inverse d'un nombre dans le groupe, son opposé. Le premier axiome est une

caractéristique élémentaire des additions. Il est à noter que l'addition est commutative. De tels groupes sont nommé abéliens ou commutatifs. Ce sont les groupes qui respectent :

$$\forall x, y \in E, xy = yx$$

2) La multiplication sur $\mathbb{R}^*$ ou sur $\mathbb{Q}^*$. L'élément neutre est bien sûr 1. L'inverse d'un nombre n est son inverse multiplicatif, c'est-à-dire $\frac{1}{n}$. C'est pour cela que l'on ne peut pas prendre les entiers comme ensemble, car l'inverse de 2 par exemple, n'est pas entier. On ne peut pas prendre non plus 0, car il n'a pas d'inverse.

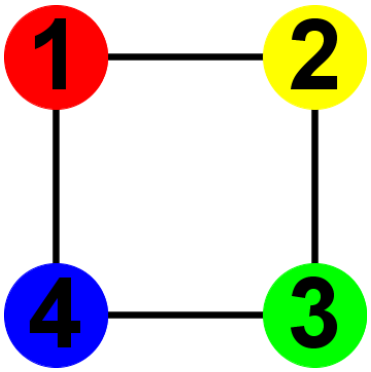


Figure 1.1

3) Pour un exemple plus conséquent, prenons le groupe des symétries du carré. C'est-à-dire toutes les transformations qui permutent les quatre sommets d'un carré (voir fig. 1.1).

En plus de l'identité, c'est-à-dire la transformation ne permutant aucun sommet, il existe deux types de symétries :

1) Les rotations, il en existe 3, toutes centrées sur le centre du carré et de 90°, 180° et 270°, que l'on nommera respectivement s_1, s_2 et s_3 (voir fig. 1.2).
2) Les réflexions, il en existe 4, selon les 4 axes de symétries du carré, que l'on nommera r_v pour l'axe vertical, r_h pour l'axe horizontal, r_d pour la diagonale passant par 1 et 3 et r_e pour la diagonale passant par 2 et 4 (voir fig. 1.3).

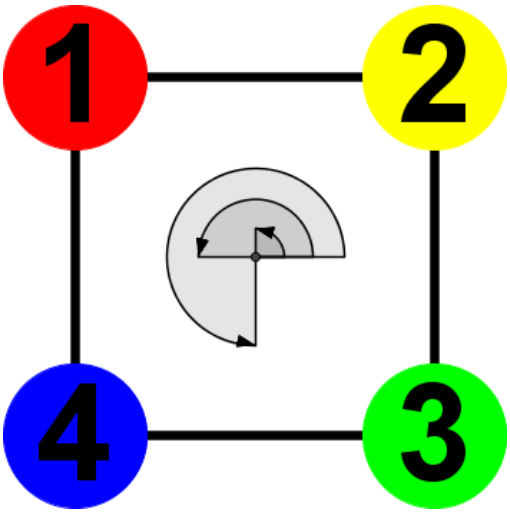


Fig. 1.2 : les rotations

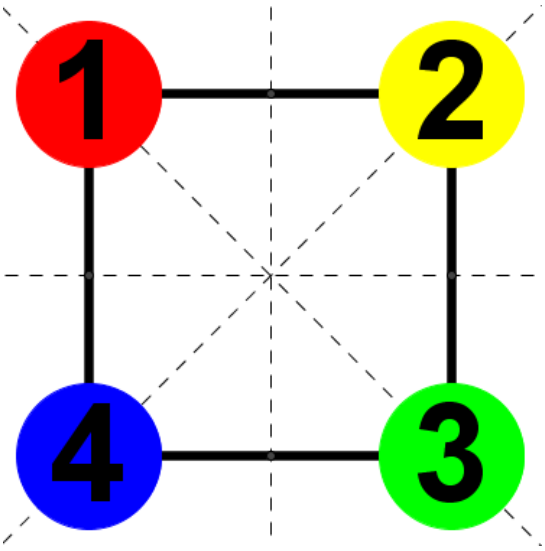


Fig. 1.3 : les réflexions

On peut alors former un groupe dit diédral, que l'on note D_4, en combinant 2 symétries, c'est-à-dire en les appliquant l'une après l'autre, notons cela ab pour l'application de a puis b. Par exemple :

- $s_1 s_2 = s_3$
- $r_d r_h = s_1$

L'axiome 2) se montre facilement, l'élément nul est l'identité qui, logiquement, ne change rien dans une composition. Pour l'axiome 3) il faut trouver les inverses : pour les rotations, c'est la rotation complémentaire pour atteindre 360° car faire un tour complet est équivalent à ne pas bouger et pour les réflexions, c'est la même transformation appliquée une deuxième fois.

Pour l'axiome 1), c'est un peu plus compliqué, on peut voir les transformations comme des permutations des sommets, donc des applications bijectives. Si on prend trois applications a, b et c sur un ensemble $E := \{1, 2, 3, 4\}$, correspondant à trois symétries et à l'ensemble des sommets du carré, alors :

$$\big((a \circ b) \circ c\big)(E) = (a \circ b)\big(c(E)\big) = a\Big(b\big(c(E)\big)\Big) = a\big((b \circ c)(E)\big)$$
$$= (a \circ (b \circ c))(E)$$

Ce groupe peut se générer à partir de deux éléments, par exemple r_d et r_h. Les rotations s'obtiennent en sachant que $r_d r_h = s_1$. Il suffit de créer les autres rotations en composant la première et de créer les autres symétries en conjuguant les symétries par les rotations. On exprime cette construction ainsi :

$$\langle r_d, r_h \mid r_d^2 = r_h^2 = (r_d r_h)^4 = 1 \rangle$$

Les éléments à gauche de la barre sont les éléments générateurs du groupe, et les éléments à droite, les relations liant ces éléments.

Quelques exemples de groupes :

Le groupe diédral D_n est le groupe correspondant aux symétries d'un polygone régulier à n côtés que nous venons de voir dans le cas $n = 4$. Il peut se décrire de deux manières différentes :

$$\langle r_1, r_2 \mid r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^n = 1 \rangle \text{ ou } \langle x, r \mid x^n = r^2 = 1, x^r = x^{-1} \rangle$$

Il existe aussi le groupe cyclique C_n équivalent à l'addition modulo n :

$$\langle x \mid x^n = 1 \rangle$$

Son ordre n peut être éventuellement infini, ce qui correspond à l'addition sur $\mathbb{Z}$. On note ce groupe simplement C et sa présentation est très simple :

$$\langle x \rangle$$

Il existe aussi le groupe abélien libre de rang n, C^n où tout élément est descriptible sous la forme d'un produit de puissances de n éléments distincts permutables. Le rang un est évidemment le groupe cyclique infini. Par exemple, pour le rang 2 :

$$C^2 \cong \langle a, b | ab = ba \rangle$$

2° LES ISOMÉTRIES DU PLAN :

Une isométrie est une transformation préservant les distances, c'est-à-dire que pour tous points A, B du plan et l'isométrie x du plan sur le vecteur $\boldsymbol{AB}$, notée $\boldsymbol{ABx}$:

$$\|\boldsymbol{AB}\| = \|\boldsymbol{ABx}\|$$

Les isométries du plan forment un groupe nommé $\mathbb{E}$.

Théorème 2.1 :

Toute isométrie est déterminée par son effet sur un triangle.

Prenons le triangle ABC et deux isométries x et y ayant le même effet. Il faut montrer que $x = y$ donc que $xy^{-1} = i$. Notons $xy^{-1} = z$, alors :

$$Az = A, Bz = B \; et \; Cz = C$$

Pour tout point $P \in \mathbb{R}^2$, Pz est à la même distance de A, de B et de C que P puisque z préserve les distances. Donc Pz est sur un cercle centré en A de rayon $\|AP\|$. Mais Pz est aussi sur deux autres cercles centrés en B et C, et ces trois cercles doivent donc se couper en un unique point Pz puisque A, B et C sont ne sont pas colinéaires. Mais un raisonnement équivalent est possible pour P et donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}^2, P = Pz \leftrightarrow z = i \leftrightarrow x = y$$

□

Les différentes transformations du plan :

Définissons maintenant quelques transformations :

Les translations sont des isométries qui bougent tout point du plan dans la même direction à la même distance. En termes plus mathématiques :

$$t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \longmapsto (x + a_1, y + a_2)$$

Avec (x, y) un point du plan et $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, un vecteur $\boldsymbol{a}$. On note alors la translation $t = t(\boldsymbol{a})$ et le sous-groupe des translations $\mathbb{T}$. Une translation préserve l'orientation, c'est-à-dire qu'un triangle dont les sommets se lisent dans le sens des aiguilles d'une montre, aura cette propriété préservée après transformation. Une translation n'a pas de point fixe, sauf si elle est triviale et la composition de deux translations se fait en additionnant les deux vecteurs :

$$t(\boldsymbol{a})t(\boldsymbol{b}) = t(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

Les rotations sont des isométries qui tournent tous les points du plan d'un même angle autour d'un même centre. Si on prend les coordonnées polaires à partir du centre *O* de rotation :

$$s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (\theta, r) \longmapsto (\theta + \alpha, r)$$

Avec (θ, r), un point du plan et α un angle fixe. On note alors la rotation $s = s(O, \alpha)$ et le sous-groupe des rotations autour de O, $\mathbb{S}_O$. Une rotation préserve l'orientation, a un point fixe, le centre de rotation, et la composition de deux rotations concentriques se fait en additionnant les angles :

$$s(O, \alpha)s(O, \beta) = s(O, \alpha + \beta)$$

Les réflexions sont des isométries qui envoient tous les points du plan de l'autre côté d'une droite, à la même distance et perpendiculairement à la droite comme une symétrie axiale. Par exemple, pour une réflexion autour de l'axe des ordonnés :

$$r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \longmapsto (x, -y)$$

Avec (x, y) un point du plan. On note $r = r(l)$, la réflexion autour de l. Les réflexions ont une infinité de points fixes, toute la droite l, et ne conservent pas l'orientation, c'est-à-dire que un triangle dans les sommets se lisent dans le sens des aiguilles d'une montre aura ses sommets qui se lisent dans le sens inverse

des aiguilles d'une montre après transformation. La composition de plusieurs réflexions est plus complexe, mais il faut noter qu'une réflexion est son propre inverse :

$$r(l)^2 = 1$$

Théorème 2.2 :

Avec une ligne l et un point fixe O appartenant à l, toute isométrie du plan peut s'écrire sous la forme :

$$u = r^{\gamma} st$$

Avec r une réflexion autour de l, $\gamma \in \{0,1\}$, $s \in \mathbb{S}_O$ et $t \in \mathbb{T}$.

Prenons une isométrie quelconque $u \in \mathbb{E}$. Prenons t la translation envoyant O sur Ou. Alors ut^{-1} fixe O. Prenons maintenant P un point appartenant à l et $dist$, la fonction donnant la distance entre deux points du plan. Puisque :

$$dist(O,P) = dist(Out^{-1}, Put^{-1}) = dist(O, Put^{-1})$$

Il existe une rotation $s \in \mathbb{S}_O$ de centre O tel que $Ps = Put^{-1}$ et donc $ut^{-1}s^{-1}$ fixe P. Prenons maintenant un point Q n'appartenant pas à l. Alors Q et Qu sont à même distance de O et à même distance de P. Il existe deux points possibles, correspondants à l'intersection de deux cercles centrés en O et en P. Si Q et Qu sont confondus, alors $\gamma = 0$, sinon $\gamma = 1$. Puisque O, P et Q forment un triangle et selon le théorème 2.1, $ut^{-1}s^{-1}r^{\gamma} = 1$ et donc, $u = r^{\gamma} st$.

□

3° LES RÉFLEXIONS :

Nous allons maintenant étudier les produits de réflexions afin de mieux classifier les différentes isométries du plan.

Théorème 3.1 :

Le produit de deux réflexions est respectivement, selon que les axes de réflexions se coupent ou pas :

- *une rotation du double de l'angle entre l'axe de la première réflexion et l'axe de la deuxième centré en leur intersection,*

- *une translation du double de la distance du premier au deuxième axe perpendiculairement aux axes des réflexions,*

Prenons deux réflexions r_1 et r_2, le long des lignes l_1 et l_2. Il existe deux cas : soit l_1 et l_2 se coupent en un point O, soit elles sont parallèles (elles peuvent être aussi confondues, mais dans ce cas, $r_1 r_2 = 1$).

Cas 1 : O existe

Notons α l'angle de l_1 à l_2. Si l'on prend un point $P = (r, \beta)$ en coordonnées polaires de centre O et d'axe l_1, alors $Pr_1 = (r, -\beta)$ et $Pr_2 = (r, \gamma)$, avec $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$ puisque que α est juste entre β et γ. Donc $\gamma = 2\alpha - \beta$ et $Pr_1 r_2 = (r, 2\alpha + \beta)$. Le produit des deux réflexions est donc une rotation de 2α et de centre O.

Cas 2 : r_1 est parallèle à r_2

Notons a la distance de l_1 à l_2. Si l'on prend un point $P = (x, y)$ en coordonnées cartésiennes d'abscisse l_1, alors $Pr_1 = (x, -y)$ et $Pr_2 = (x, z)$, avec $a = \frac{y+z}{2}$ puisque l_2 est à mi-distance entre y et z. Donc $z = 2a - y$ et $Pr_1 r_2 = (x, 2a + y)$. Le produit des deux réflexions est donc une translation de $2a$ perpendiculairement à l_1 et l_2.

□

En conséquence, on peut écrire n'importe quelle rotation ou translation sous la forme du produit de deux réflexions.

Théorème 3.2 :

Le produit de trois réflexions est soit une autre réflexion s'il y a moins de 2 points d'intersections, soit une translation suivie d'une réflexion dans le même axe.

Prenons le produit des trois réflexions r_1, r_2 et r_3.

Cas 1 : aucune intersection

Les trois réflexions sont forcément parallèles. Notons r la réflexion telle que $r_1 r_2 = r r_3$, alors $r_1 r_2 r_3 = r r_3 r_3 = r$. Le produit des trois réflexions est donc aussi une réflexion.

Cas 2 : une intersection

Les trois réflexions se coupent forcément en un point. Notons de nouveau r la réflexion telle que $r_1 r_2 = r r_3$, alors $r_1 r_2 r_3 = r r_3 r_3 = r$. Le produit des trois réflexions est de nouveau une réflexion.

Cas 3 : deux ou trois intersections

Remarquons déjà que dans le cas de trois intersections, on peut revenir à deux intersections facilement. En effet, si on tourne deux droites de réflexion autour de leur point d'intersection, cela ne change pas leur produit. On peut donc s'arranger pour avoir l_2 et l_3 parallèles en tournant l_1 et l_2 autour de leur axe. Cela est bien sûr aussi valable dans le cas à deux intersections, lorsque deux droites sont parallèles, et donc, on peut considérer uniquement le cas où $l_2 \parallel l_3$.

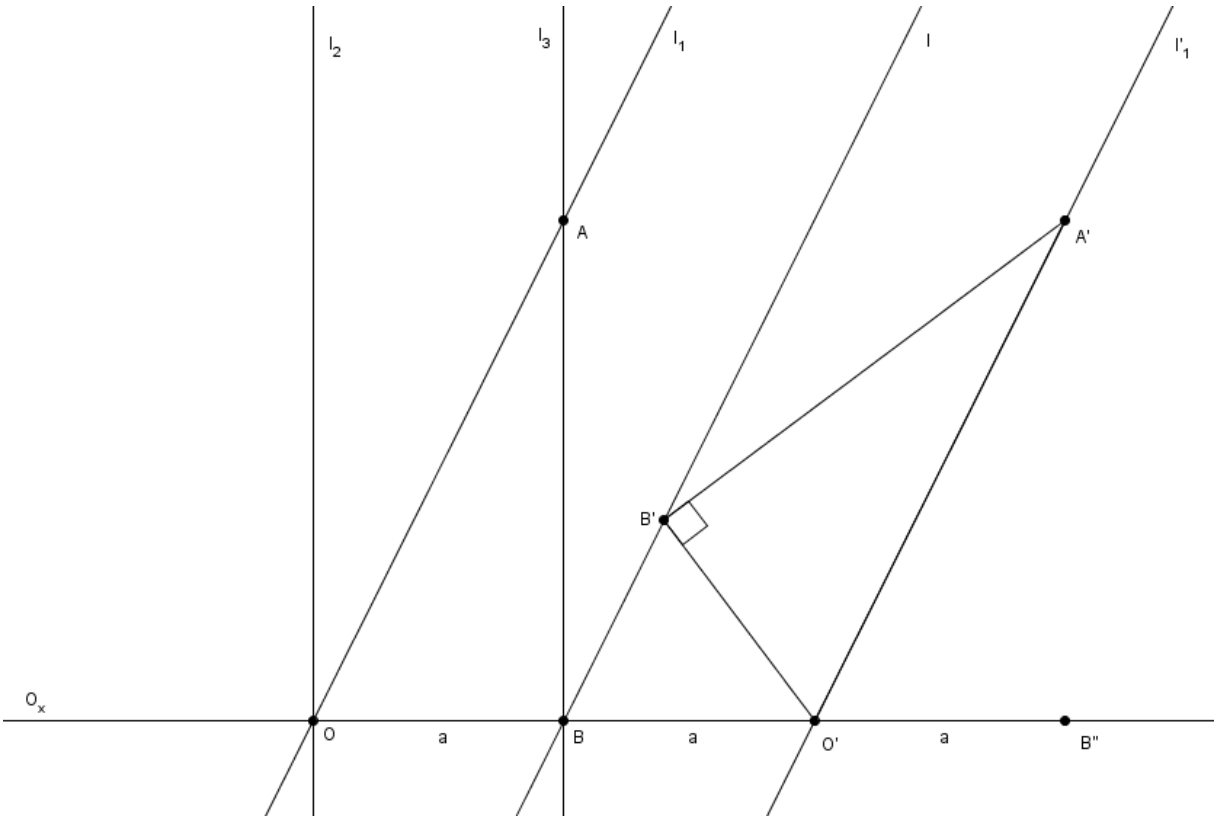


Figure 3.1

Pour cela, regardons la figure 3.1. Prenons pour l'axe O_x la droite passant par O et B, qui est l'intersection entre la perpendiculaire à l_2 passant par O et l_3 et pour l'axe O_y, l_2. Il y a deux cas à traiter, selon si $A = B$ ou non :

Cas 3.1 : $A \neq B$

O, A et B forment un triangle, on peut donc utiliser le théorème 2.1 pour connaître l'isométrie $r_1 r_2 r_3$. Les images de O et de A se trouvent facilement

car l_1 les fixe et $l_2 l_3$ est une translation de $2a$. Pour l'image de B, il y a deux possibilités en utilisant le fait que les distances sont préservées, B' et B'', mais en sachant que $r_1 r_2 r_3$ change l'orientation, on voit que c'est B' qui est juste. $r_1 r_2 r_3$ est donc une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ suivie d'une réflexion d'axe l.

Cas 3.2 : $A = B$

Dans ce cas, on a une réflexion d'axe O_x suivie d'une translation de $2a$, ce qui est équivalent à la translation suivie de la réflexion puisque les deux envoient un point quelconque (x, y) vers $(x + 2a, -y)$.

□

Dans les deux derniers cas, il s'agit d'une translation suivie d'une réflexion dans le même axe, c'est une autre transformation que l'on appellera réflexion glissée :

$$g(PP') \coloneqq r(l)t(\overrightarrow{PP'})$$

Pour deux points P et P' sur une ligne l. Les réflexions glissées n'ont pas de points fixes et ne préservent pas l'orientation.

Quatre réflexions :

Le produit de quatre réflexions est, selon le théorème 3.1, équivalent au produit de deux translations, deux rotations ou une de chaque. Le premier cas a déjà été traité au chapitre 2, c'est une translation. Quant aux deux autres cas, c'est plus complexe :

Cas 2 : deux rotations

Prenons deux rotations $s(O, 2\alpha)$ et $s'(O', 2\alpha')$ et trois droites l, l' et l'' définies comme sur la figure 3.2 :

Alors s et s' peuvent s'écrire sous la forme :

$$s = r(l')r(l)$$

$$s' = r(l)r(l'')$$

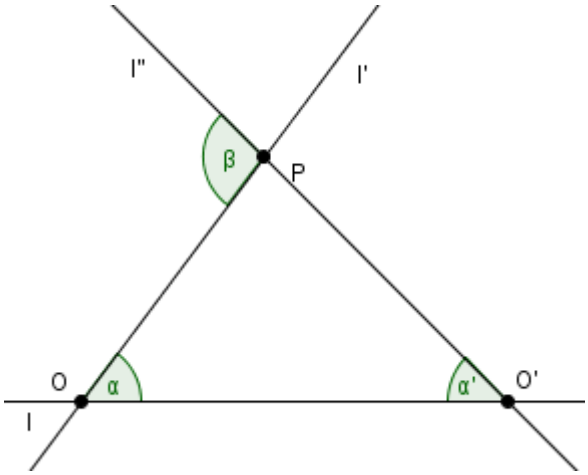


Figure 3.2

Et ss' vaut donc :

$$ss' = r(l')r(l)r(l)r(l'') = r(l')r(l'')$$

Dans le cas où P existe, c'est une rotation d'angle β et de centre P, sinon $\alpha = -\alpha'$ et c'est une translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

Cas 3 : une de chaque

Prenons une rotation $s(O, 2\alpha)$, une translation $t(\boldsymbol{a})$ et trois droites l, l' et l'' définies comme sur la figure 3.3, l'' étant la médiatrice de O et Ot :

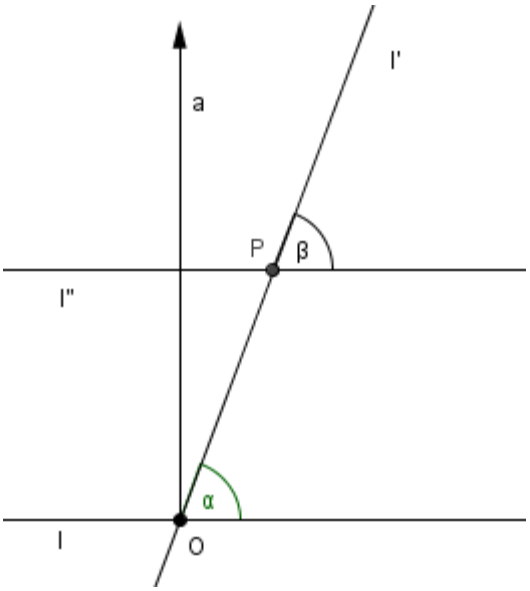


Figure 3.3

Alors s et t peuvent s'écrire sous la forme :

$$s = r(l')r(l)$$

$$t = r(l)r(l'')$$

Et st vaut donc :

$$st = r(l')r(l)r(l)r(l'') = r(l')r(l'')$$

C'est une rotation d'angle $\beta = \alpha$ et de centre P. Dans le cas d'une translation suivie d'une rotation $u = ts$, observons que :

$$u^{-1} = s^{-1}t^{-1}$$

Est une rotation, et donc u aussi. Le produit de quatre réflexions est donc soit une translation, soit une rotation qui sont tous les deux descriptibles aussi par deux réflexions.

Plus de quatre réflexions :

Pour plus de quatre réflexions, on peut réduire le nombre de réflexions n à $n - 2$ et donc, par récurrence, réduire tout produit de réflexions à deux ou trois réflexions, et selon le théorème 2.2, toute isométrie aussi.

Théorème 3.3 :

Tout isométrie du plan peut être décrite comme le produit de au plus trois réflexions et est l'une des isométries suivantes caractérisées par leur préservation de l'orientation et la présence ou non de points fixes :

Points fixes ?	*Oui*	*Non*
Préserve l'orientation	**Rotation**	**Translation**
Ne préserve pas l'orientation	**Réflexion**	**Réflexion glissée**

□

4° LES GROUPES DISCRETS DU PLAN :

Un groupe du plan est dit discret si, pour toutes les transformations d'un point par ce groupe (ce qu'on appelle l'orbite), il existe une distance minimale non-nulle entre ces différents points transformés. Tous les sous-groupes finis sont donc bien sûr discrets. Nous allons d'abord nous intéresser aux groupes sans translations, c'est-à-dire que $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$. Nous prendrons G^+ pour le sous-groupe conservant l'orientation.

Théorème 4.1 :

Pour tout sous-groupe G de $\mathbb{E}$ avec $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$, il existe un point O fixé par tous les éléments de G.

G est soit trivial, soit il contient une réflexion, soit il contient au moins une rotation $s = s(O, \alpha)$ non-nulle car le produit de deux réflexions donne une rotation ou une translation, et G ne contient aucune translation. Dans les deux premiers cas, la preuve est triviale. Pour le troisième, supposons qu'il existe un élément u qui bouge O :

$$Ou = O' \neq O$$

Alors $u^{-1}su = s(O', \pm\alpha)$, le signe de α pouvant changer selon que u préserve ou ne préserve pas l'orientation. Et $s^{\mp 1}u^{-1}su$ est une translation non-triviale selon le chapitre précédent, et donc $G \cap \mathbb{E} \neq \{1\}$.

□

Corollaire 4.1 (Léonard de Vinci) :

Tout sous-groupe fini de $\mathbb{E}$ est soit cyclique, soit diédral.

Prenons un sous-groupe fini $G \in \mathbb{E}$. G ne contient pas de translations car une translation forme un sous-groupe de cycle infini et a donc une infinité d'éléments. Donc $G \cap \mathbb{T} = \{1\}$ et G fixe un point O selon le théorème 4.1. Le sous-groupe G^+ est donc composé de rotations selon le théorème 3.3. S'il est trivial, alors G ne contient qu'une réflexion puisque le produit de deux réflexions est une rotation. Donc $G \cong \{1\}$ ou C_2 selon qu'il a une réflexion ou non.

Sinon, G contient une rotation minimale $s = s(O, \alpha)$ avec $n\alpha = 0 \ mod \ 2\pi$ car il est discret. Supposons qu'il n'y pas de rotation minimale. Dans ce cas, l'orbite d'un point $P \neq O$ serait composée d'une infinité de points disposés sur un

cercle, qui est une courbe de longueur finie. Il n'y aurait donc pas de distance minimale dans l'orbite.

Toute rotation est une puissance de cette rotation s. Imaginons le contraire, il existe donc une rotation $s' = s(O, \beta)$ telle que $s^m \neq s'$ pour tout m. Prenons m le plus grand tel que $m\alpha < \beta$. Dans ce cas, la rotation $s's^{-m}$ est d'angle $\beta - m\alpha < \alpha$ et contredit donc la minimalité de α. Si $G^+ = G$ alors $G \cong C_n$.

Sinon il existe au moins une réflexion r et toutes les réflexions sont le produit de celle-ci et d'une rotation puisque pour une réflexion r' quelconque, il existe un m tel que $rr' = s^m$ et donc $r' = s^m r$. Dans ce cas $G \cong D_n$.

□

Théorème 4.2 :

Tout sous-groupe discret G de $\mathbb{E}$ a un sous-groupe de translation $T = G \cap \mathbb{T}$ trivial, cyclique ou abélien libre de rang 2.

Si T n'est pas trivial, il existe une translation minimale a car il est discret. Si on prend un point $O \in \mathbb{R}^2$, alors toute puissance de a est sur la droite l passant par O et Oa. Alors $T = \langle a \rangle$ ou il existe d'autres translations. Toute translation $t \in T \backslash \langle a \rangle$ n'est pas sur l, sinon on pourrait prendre le plus grand n tel que $a^n < t$ et alors la translation ta^{-n} serait plus petite que a.

Prenons maintenant la translation minimale $b \in T \backslash \langle a \rangle$. Toute puissance de b est sur la droite l' passant par O et Ob comme avant. Alors les lignes lb^n et $l'a^n$ découpent le plan selon des parallélogrammes. Tout élément de T est descriptible sous la forme $a^m b^n$. Imaginons le cas contraire, il existe donc une translation t qui n'amène pas O sur un sommet d'un des parallélogrammes. Ramenons déjà ce parallélogramme à l'origine en prenant $t' = ta^{-m}b^{-n}$ au lieu de t, où a^m et b^n sont les translations qui amènent O sur le coin en bas à gauche du parallélogramme (voir fig. 4.1). Il y a alors deux cas. Si Ot' est plus proche de O, t' est plus petit que b ce qui contredit sa minimalité. S'il est plus proche de Q, prenons $t'a^{-1}b^{-1}$, et on

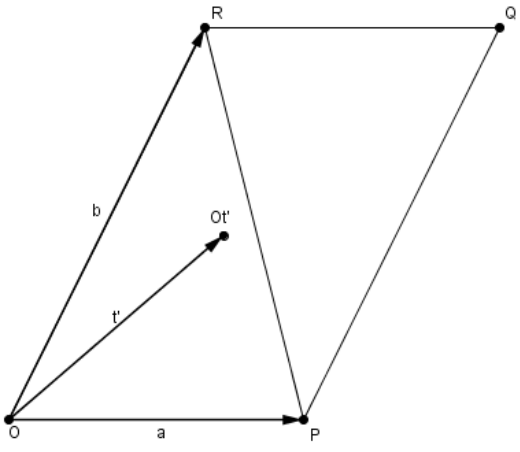


Figure 4.1

obtient une situation analogue à la précédente. Dans ce cas, T est abélien libre de rang 2.

□

5° LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES : LES CAS PRÉSERVANT L'ORIENTATION

Les groupes cristallographiques du plan sont les groupes discrets G du plan où $T = G \cap \mathbb{T} \cong C^2$. Comme dans le chapitre précédent et aussi dans le chapitre suivant, nous prendrons a et b pour les deux translations minimales non-linéairement dépendantes et s pour une rotation. Il est important d'avoir en tête l'utilisation de la conjugaison : $x^y = y^{-1}xy$ est une transformation équivalente à x mais faite sur l'image du plan par y. Par exemple, pour une translation t et une rotation s, t^s est une translation avec pour vecteur l'image du vecteur de t par s. Dans ce chapitre, nous n'étudierons que le cas où $G = G^+$. Donc, selon le théorème 3.3, $G\backslash T$ n'est composé que de rotations. Il est possible qu'il n'y ait aucune rotation, cela nous donne déjà un premier groupe :

$$G_1 = \langle a, b | ab = ba \rangle$$

Théorème 5.1

Toute rotation $s = s(O, \alpha)$ d'un sous-groupe discret du plan a ces deux caractéristiques :

1) *Un ordre fini $n \in \mathbb{N}$*
2) $\langle s \rangle = \langle s\left(O, \frac{2\pi}{n}\right) \rangle$

Supposons que s a un ordre infini. Dans ce cas, l'orbite d'un point $P \neq O$ serait composée d'une infinité de points disposés sur un cercle, qui est une courbe de longueur finie. Il n'y aurait donc pas de distance minimale dans l'orbite. Prenons maintenant $s' = s(O, \frac{2\pi}{n})$. Puisque $s^n = s(O, n\alpha), n\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$. Donc $s'^k = s$. Cela montre que $\langle s \rangle \leq \langle s' \rangle$ et comme les deux ont un ordre de n, $\langle s \rangle = \langle s(O, \frac{2\pi}{n}) \rangle$.

□

Théorème 5.2

L'ordre n de toute rotation d'un sous-groupe cristallographique est 2, 3, 4 ou 6 :

Prenons une rotation $s = s\left(O, \frac{2\pi}{n}\right), n \in \mathbb{N}$ et définissons le point $A = Oa$ (voir fig. 5.1). Dans le cas $n \geq 7$, on voit que la distance entre A et As est plus petite que a. Si on prend la translation $t = a^{-1}a^s = a^{-1}s^{-1}as$ et qu'on l'applique à A, on obtient :

$$At = Oaa^{-1}s^{-1}as = Os^{-1}as = Oas = As$$

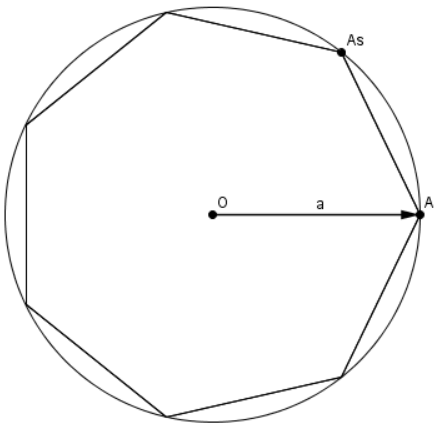


Figure 5.1

Comme a est définie comme la plus petite translation et que t est plus petite que a, on arrive à une contradiction.

Pour le cas $n = 5$, prenons $B = Oa^{-1}$ et observons que la distance entre B et $C = As^3$ est plus petite que a (voir fig. 5.2). Prenons la translation $t = aa^{s^3} = as^{-3}as^3$. Si on l'applique à B, on obtient :

$$Bt = Oa^{-1}as^{-3}as^3 = Os^{-3}as^3 = Oas^3 = As^3$$

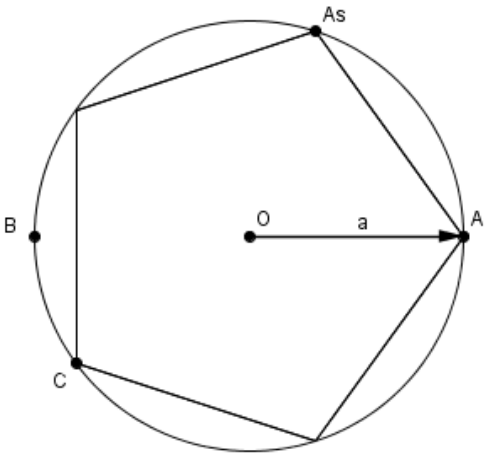


Figure 5.2

Donc il existe aussi une translation plus petite et on obtient encore une contradiction.

Le choix de *b* :

Il s'agit maintenant de choisir b parmi les différentes possibilités et de voir l'effet des rotations sur les translations. Procédons cas par cas :

$\underline{n = 2 :}$

Dans ce cas, le seul choix qui s'offre à nous est la deuxième plus petite translation non-linéairement dépendante, et l'effet de s dessus est :

$$a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}$$

$\underline{n = 3 :}$

Il existe deux possibilités logiques pour b : a^s ou $a^s a$. On prendra la deuxième pour la similarité avec $n = 6$. L'effet de s est alors :

$$a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1}$$

$\underline{n = 4 :}$

La seule possibilité est a^s. L'effet de s est alors :

$$a^s = b, b^s = a^{-1}$$

$\underline{n = 6 :}$

Comme dans $n = 3$, il y a deux possibilités : a^s ou a^{s^2}. La première est la plus simple et l'effet de s dessus est :

$$a^s = b, b^s = a^{-1}b$$

Théorème 5.3

Il existe 5 groupes cristallographiques préservant l'orientation différents :

$$G_1 = \langle a, b | ab = ba \rangle$$

$$G_2 = \langle a, b, s | ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1} \rangle$$

$$G_3 = \langle a, b, s | ab = ba, s^3 = 1, a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1} \rangle$$

$$G_4 = \langle a, b, s | ab = ba, s^4 = 1, a^s = b, b^s = a^{-1} \rangle$$

$$G_6 = \langle a, b, s | ab = ba, s^6 = 1, a^s = b, b^s = a^{-1}b \rangle$$

□

Dans la notation classique des cristallographes, ils se nomment respectivement $p1$, $p2$, $p3$, $p4$ et $p6$.

6° LES GROUPES CRISTALLOGRAPHIQUES : LES CAS NE PRÉSERVANT PAS L'ORIENTATION

Dans ce chapitre nous allons rajouter les réflexions et les réflexions glissées au groupe G.

Remarquons déjà que selon le théorème 3.1, le produit de deux réflexions glissées ou non est une rotation ou une translation. Il suffit donc d'une seule réflexion ou réflexion glissée pour générer le groupe. Imaginons que l'on ait deux réflexions, glissées ou non, leur produit serait une rotation ou une translation et serait déjà dans le groupe. Prenons $u = r_1 r_2$ pour cette transformation. Alors $r_1^{-1} u = r_2$ et on peut exprimer r_2 comme le produit d'autres transformations du groupe. Nous prendrons r comme notation pour cette unique réflexion.

Nous allons considérer les cinq groupes du théorème 5.3 et dans chaque cas, voir comment on peut rajouter des réflexions en sachant qu'elles doivent respecter l'orbite du centre de rotation O (ou de n'importe quel autre point, ce que l'on fera dans le cas de G_1).

Lemme 6.1 :

Dans tout groupe discret du plan G contenant une réflexion r glissée ou non, on peut se réduire aux cas :

- *r parallèle à ab et non glissée*
- *r parallèle à a et non glissée*
- *r parallèle à a et glissée*

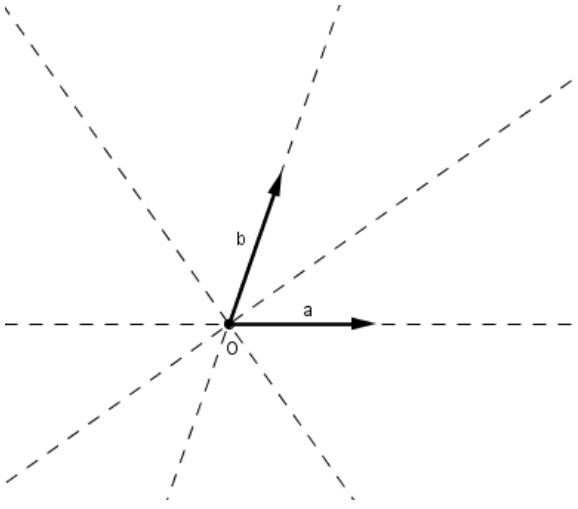


Figure 6.1

Si on prend l'orbite de O, on voit qu'on peut prendre r parallèle à a, b, ab et plusieurs autres (fig. 6.1). Mais en substituant a, b et leurs inverse, on arrive à seulement deux possibilités distinctes a et ab.

Le cas d'une réflexion glissée parallèle à ab est éliminable. En effet, si l'on prend $r^2 = ab$, alors $a^r = b$ par hypothèse de minimalité. En effet, le vecteur $\boldsymbol{a}$

est plus court que le vecteur $\boldsymbol{b}$. Et comme a^r est envoyé sur l'axe de b, et que b est aussi minimal, $a^r = b$ et :

$$(ra^{-1})^2 = r^2 \cdot r^{-1}a^{-1}r \cdot a^{-1} = ab \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} = 1$$

Et on peut donc remplacer r par ra^{-1} pour se retrouver dans le cas d'une réflexion non-glissée.

□

Pour déterminer le groupe s'il contient une rotation, il va falloir trouver la relation entre r et s. On prendra pour cela la valeur de $(sr)^2$.

Lemme 6.2 :

Dans tout groupe cristallographique du plan G contenant une réflexion, une rotation et une translation t si $t^{sr} = t$, alors $(sr)^2$ est une translation (éventuellement triviale) parallèle à t.

Déjà sr est une réflexion selon le théorème 3.3, donc $(sr)^2$ est une translation qui sera triviale si le centre de s est compris dans l'axe de r et si r n'est pas glissée. Ensuite :

$$t^{sr} = t \;\Rightarrow\; (sr)^{-1} \cdot t \cdot sr = t \;\Rightarrow\; t \cdot sr = sr \cdot t$$

En étudiant les cas où sr commute avec t, on voit que seuls les cas où sr est parallèle à t fonctionnent. En effet, t est le produit de deux réflexions, r_1 et r_2. Pour pouvoir commuter, il faut que les axes de ces réflexions ne tournent pas sous l'action de sr. Ils peuvent par contre être translatés ensemble. Il s'agit de deux axes perpendiculaires à r. Par conséquent, $(sr)^2$ est le carré d'une réflexion dont l'axe est parallèle à t, c'est une translation parallèle à t si sr est glissé, éventuellement trivial si sr n'est pas glissé.

On a donc $(sr)^2 = t^{2k+h}$, avec k entier et $h = 0$ ou 1, et on peut enlever les $2k$ en remplaçant r par rt^{-k} et donc se retrouver avec $(sr)^2 = t$ ou 1.

□

Chaque groupe sera nommé par une notation explicite et par la notation classique des cristallographes.

Cas 1 : G_1

Si on prend r parallèle à ab, on trouve forcément $a^r = b$ et inversement comme au lemme 6.1, puisque r respecte l'orbite de O ce qui nous fait un premier groupe.

Prenons maintenant r parallèle à a. Soit b est perpendiculaire à a ce qui nous donne deux autres groupes selon si r est glissé ou pas, soit $b^r = ab^{-1}$ puisque Ob est plus près de O que de Oa selon l'hypothèse de minimalité et comme a est minimal, $b^r b = a$. Dans ce cas, on peut remplacer a par ab^{-1}et on retombe sur le premier groupe. Nous avons donc 3 groupes pour G_1 :

$G_1^1 = pm = \langle a, b, r | ab = ba, r^2 = 1, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$

$G_1^2 = cm = \langle a, b, r | ab = ba, r^2 = 1, a^r = b, b^r = a \rangle$

$G_1^3 = pg = \langle a, b, r | ab = ba, r^2 = a, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$

Cas 2 : G_2

Prenons déjà r une réflexion parallèle à a. On peut prendre r passant par les centres de rotation ou entre deux centres. La valeur de $(sr)^2$ vaudra respectivement 1 et b. En effet, selon le lemme 6.2, $b^{sr} = (b^{-1})^r = b$ selon les relations de G_2 et en prenant le fait que b est perpendiculaire à a comme au cas 1. Cela nous donne déjà deux groupes.

Avec une réflexion glissée parallèle à a, $r^2 = a$, on voit que $b^{sr} = (b^{-1})^r = b$ et donc $(sr)^2 = b$ ou 1. La première possibilité est un nouveau groupe.

Dans la 2e possibilité, avec $(sr)^2 = 1$, si on substitue sr à r, on se retrouve avec $(sr)^2$ qui vaut l'ancien $(ssr)^2 = r^2 = a$. De plus $a^{sr} = (a^{-1})^r = a^{-1}$ et $b^{sr} = (b^{-1})^r = b$. Ce nouveau groupe est similaire au 2e groupe G_2^3 en inversant a et b.

Si on prend maintenant r parallèle à ab, on a $a^r = b$ et inversement comme au cas 1 et $(sr)^2$ est parallèle à $a^{-1}b$ puisque $(a^{-1}b)^{sr} = (ab^{-1})^r = a^{-1}b$. Donc $(sr)^2 = 1$ ou $a^{-1}b$. La 1e possibilité est un nouveau groupe. Dans la deuxième, substituons sb à s. Les relations de G_2 en sont préservées. $(sr)^2$ vaut alors l'ancien :

$$(sbr)^2 = (srb^r)^2 = (sra)^2 = (sr)^2 \cdot a^{sr} \cdot a = a^{-1}b \cdot (a^{-1})^r \cdot a$$
$$= a^{-1}b \cdot b^{-1} \cdot a = 1$$

On retombe donc sur le cas précédant. Il y a donc 4 groupes pour le cas 2 :

$$G_2^1 = pmm = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, r^2 = (sr)^2 = 1, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$$

$$G_2^2 = pmg = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, r^2 = 1, (sr)^2 = b, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$$

$$G_2^3 = pgg = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, r^2 = a, (sr)^2 = b, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$$

$$G_2^4 = cmm = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^2 = 1, a^s = a^{-1}, b^s = b^{-1}, r^2 = (sr)^2 = 1, a^r = b, b^r = a \rangle$$

Cas 3 : G_4

Prenons r parallèle à a. $r^2 = 1$ ou a, et $(sr)^2 = 1$ ou $a^{-1}b$ car selon les relations de G_4 et le lemme 6.2, on a $a^r = a$ et $b^r = b^{-1}$ puisque $b = a^s$ est perpendiculaire à a, et:

$$(a^{-1}b)^{sr} = (b^{-1}a^{-1})^r = ba^{-1} = a^{-1}b$$

Dans la deuxième possibilité, on prend sa à la place de s, les relations du groupe sont préservées. Et $(sr)^2$ vaut alors :

$$(sar)^2 = (sra^r)^2 = (sra)^2 = (sr)^2 \cdot a^{sr} \cdot a = a^{-1}b \cdot b^r a = a^{-1}b \cdot b^{-1}a = 1$$

Ce qui est équivalent au premier cas. On a donc deux groupes selon que r est une réflexion glissée ou non.

Si on prend r parallèle à ab, donc $a^r = b$ et inversement, on a $a^{sr} = b^r = a$ et $b^{sr} = (a^{-1})^r = b^{-1}$. On peut donc remplacer r par sr et revenir au premier cas. On trouve donc deux groupes :

$$G_4^1 = p4m = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^4 = 1, a^s = b, b^s = a^{-1}, r^2 = (sr)^2 = 1, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$$

$$G_4^2 = p4g = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^4 = 1, a^s = b, b^s = a^{-1}, r^2 = a, (sr)^2 = 1, a^r = a, b^r = b^{-1} \rangle$$

Lemme 6.3 :

Si G contient une rotation s d'angle $\frac{2\pi}{3}$, alors toute réflexion glissée r de G peut être ramenée à une réflexion $r' = rt'$ à l'aide d'une translation t' appartenant à G.

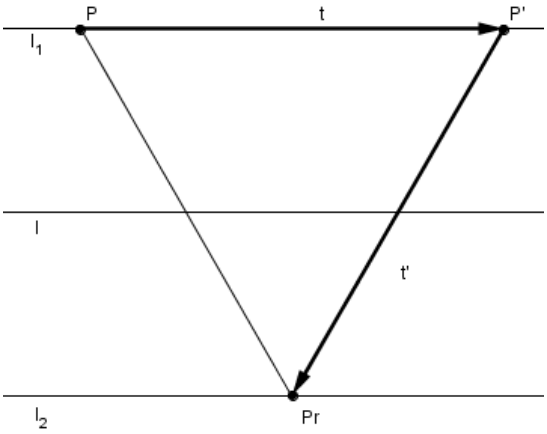


Figure 6.2

Prenons deux droites l_1 et l_2 parallèles à l'axe l de réflexion et à distance $\frac{\sqrt{3}}{4}\|t\|$ de cet axe (voir fig.6.2), t étant le vecteur de la translation r^2. La réflexion glissée Pr d'un point $P \in l_1$ est sur l_2 et la réflexion $P' = Pr^2$ de Pr est sur l_1. Si on prend la translation $t' = t^s$, on remarque qu'elle envoie P' sur Pr puisque les trois points forment un triangle équilatéral. Donc la réflexion $r' = rt'$ a un point fixe et n'est donc pas glissée.

On peut donc remplacer r par r' dans les cas suivants puisque la conjugaison n'en est pas changé.

Cas 4 : G_3

Dans ce cas, on voit bien que tous les axes de réflexions passent par des centres de rotations (voir fig. 6.3). Par exemple, il n'y a pas d'axe de réflexion parallèle à a passant entre O et Ob. La seule façon d'en mettre une entre serait de prendre une réflexion glissée à mi-distance de O et Ob qui enverrait, par exemple, O sur Ob. Cela est réductible selon le lemme 6.3. Donc $(sr)^2 = 1$.

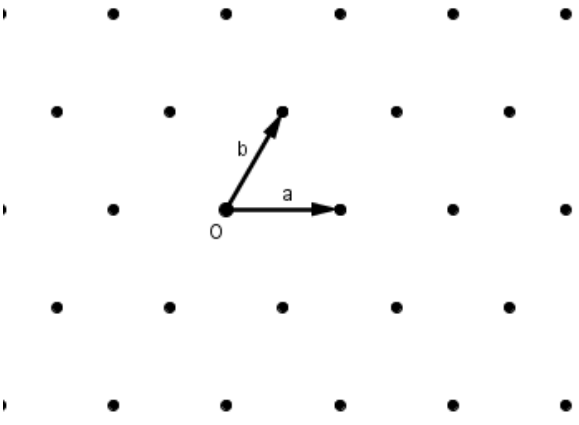


Figure 6.3

Nous avons donc deux cas selon que r est parallèle à a ou ab :

$$G_3^1 = p31m = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^3 = 1, a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1}, r^2 = (sr)^2 = 1, a^r = a, b^r = ab^{-1} \rangle$$

$$G_3^2 = p3m1 = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^3 = 1, a^s = a^{-1}b, b^s = a^{-1}, r^2 = (sr)^2 = 1, a^r = b, b^r = a \rangle$$

Cas 5 : G_6

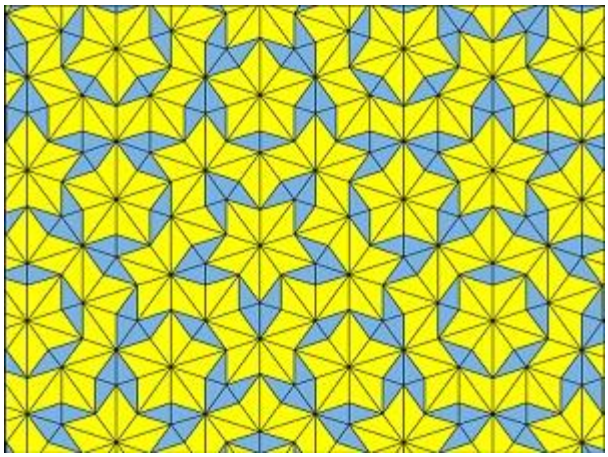
Pour ce cas, reprenons les groupes du cas précédent en changeant la rotation et montrons qu'ils sont équivalents avec une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Si on prend r pour la réflexion du premier groupe parallèle à a et r' celle du deuxième groupe parallèle à ab, on voit que $s = rr'$ et donc $rs = r'$. Il suffit donc de remplacer r par rs dans le premier groupe pour trouver le second. La conjugaison n'en est pas affectée et donc les deux groupes sont équivalents. Ce groupe est :

$$G_6 = p6m = \langle a, b, s, r | ab = ba, s^6 = 1, a^s = b, b^s = a^{-1}b, r^2 = (sr)^2 = 1,$$
$$a^r = b, b^r = a\rangle$$

CONCLUSION :

Nous avons donc établi la liste des 17 groupes cristallographiques ou groupes discrets des isométries du plan. Le tout s'est fait mathématiquement de manière plutôt stricte, même si de nombreux points utilisés de la théorie des groupes n'ont pas été évoqué, notamment la façon d'utiliser les sous-groupes.

Ce travail m'a apporté beaucoup de nouvelles notions dans une théorie où je ne connaissais que quelques bases. Il m'a permis de voir à quoi pouvait ressembler des études en mathématiques à un niveau supérieur, m'a obligé à formaliser différents concepts et à les utiliser de manière stricte. Je tiens à remercier Jacques Ducommun qui organise le PROVOC, Bruno Colbois qui m'a donné la possibilité d'une multitude de sujets et surtout Antoine Gournay, qui m'a suivi tout le long et m'a aidé à arriver au bout de ce travail.



Un pavage de Penrose

Pour conclure, parlons un peu des pavages non-périodiques. Pendant longtemps les mathématiciens ont cru que tous les ensembles de tuiles pouvaient paver le plan de façon périodique. Mais en 1966, Robert Berger trouva un ensemble de 20'426 pavés qui ne peuvent paver le plan que de façon apériodique et montra par la même occasion que savoir si un ensemble de tuiles pave le plan est un problème indécidable, c'est-à-dire que l'on ne peut pas le montrer ou le réfuter. Plusieurs ensembles plus petits furent découverts par la suite et en 1973 et 1974, Roger Penrose trouva trois ensembles apériodiques, dont deux avec seulement deux pièces. Ces pavages popularisèrent le problème en raison de leur esthétisme. Il est intéressant de noter que les pavages de Penrose, ont une rotation d'ordre 5. Or, selon le théorème 5.2, les pavages périodiques peuvent avoir des rotations d'ordre 2, 3, 4 ou 6, mais pas 5. Le 8 avril 1982, Dan Shechtman découvrit un quasi-cristal, dont le réseau cristallin était un pavage apériodique avec des rotations d'ordre 10. Cette découverte lui valut le prix Nobel de Chimie 2011.

SOURCES :

Livres :

1. JOHNSON D.L., *Symmetries*, Londres, Springer, Springer Undergraduate Mathemathics Series, 2001.
2. NIKULIN V.V. et SHAFAREVICH I.R., *Geometries and Groups*, Berlin, Springer, 1987.

Sites webs :

1. , Xavier Hubaut, *Groupes cristallographiques du plan* xavier.hubaut.info/coursmath/doc/cristal.htm
2. Wikipédia, *Groupe (mathématiques)*, fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_%28math%C3%A9matiques%29

Images :

Page 4 : Aurélien Alvarez, *Fléchettes et cerfs-volants dans le ciel mathématique*, images.math.cnrs.fr/Flechettes-et-cerfs-volants-dans.html

Page 25 : *Pavages de Penrose*, http://www.spacegoo.com/blog/pavages-de-penrose/